

Descrizione analitica completa dei limiti dello spazio di lavoro per un manipolatore in serie planare

Comptes Rendus Mécanique 346 (2018) 13 – 25
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.10.004>

Jérôme Bastien

Laboratoire Interuniversitaire de Biologie de la Motricité
 POLYTECH
 Claude Bernard University -Lyon 1
 15 Boulevard André LATARJET
 69622 Villeurbanne Cedex
 France
 jerome.bastien@univ-lyon1.fr

riassunto

Proponiamo un metodo generale e analitico per descrivere i limiti dello spazio di lavoro planare, ovvero il bordo della parte dello spazio del piano raggiunto dalla fine di un braccio umano o robot. Il metodo proposto è suddiviso in tre fasi indipendenti, nessuna delle quali richiede calcoli di derivati, determinanti o autovalori o l'utilizzo di metodi di risoluzione numerica di problemi non lineari, tutti spesso utilizzati in letteratura. Il primo passo, già presentato in un lavoro precedente, consiste nell'interpretare geometricamente la necessaria degenerazione della matrice giacobina della funzione di posizione, ai margini dell'area di lavoro e una condizione di allineamento di alcuni giunti consente di determinare un incontro di archi di un cerchio che contengono il bordo. Quindi, per ciascuno degli archi di un cerchio, lo studio della variazione infinitesimale di un punto rispetto a questo cerchio consente di eliminare tutti o parte degli archi di un cerchio precedentemente definito, che non si trova sul bordo. Infine, un corso globale della riunione degli archi del cerchio consente di determinare il bordo esterno e il bordo interno del possibile foro dell'area di lavoro che contiene l'origine.

Parole chiave: Robotica; Spazio di lavoro; frontiera; braccio; articolazione; biomeccanica

1. Presentazione del problema

In robotica come in biomeccanica, la conoscenza dello spazio di lavoro, un'area dello spazio che può raggiungere la fine di un arto umano o il braccio di un robot, ad esempio, è fondamentale. Il bordo di questo spazio di lavoro deve essere definito correttamente. I giunti considerati sono collegamenti pivot, definiti da un intervallo a cui appartiene l'angolo tra i due segmenti attorno al collegamento. Nel caso piano, questa Nota è la continuazione di lavori [2,3] in cui abbiamo proposto una condizione locale necessaria ma non sufficiente per un punto nell'area di lavoro che si trovi al suo confine. Fondata su una semplice proprietà geometrica, questa condizione ha permesso di ottenere in forma analitica un insieme di archi di cerchio, senza i soliti calcoli dei determinanti effettuati nel simbolismo, che contengono il confine. Questo è il passaggio 0 del metodo (vedere la sezione 2).

Tenendo presente la semplicità e la robustezza del metodo proposto, ora desideriamo eliminare le parti degli determinati archi del cerchio che non si trovano sul bordo dell'area di lavoro. Anche in questo caso, proponiamo un metodo generale, analitico e completo, basato esclusivamente su semplici calcoli di prodotti scalari, che costituisce la fase 1 del metodo (vedere la sezione 3). Infine, proponiamo una condizione globale necessaria e sufficiente che consenta di fornire analiticamente il confine sotto forma di riunioni degli archi di un cerchio (sezione 4). Daremo alcune possibili applicazioni (sezione 5). Facciamo quindi alcune osservazioni sull'implementazione IT (sezione 6) prima di dare un esempio (sezione 7) e le poche limitazioni del metodo proposto (sezione 8).

Come in [2,3], consideriamo (O, \vec{i}, \vec{j}) un riferimento ortonormale diretto, p un numero intero maggiore o uguale a uno, $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$ p numeri strettamente positivi e $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ e $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ $2p$ angoli con

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad -\pi < \theta_i^- < \theta_i^+ \leq \pi. \quad (1)$$

Definiamo l'area di lavoro come l'insieme di punti A_p controllo

$$A_0 = 0, \quad \left(\widehat{\vec{j}, 0A_1} \right) = \theta_1, \quad (2a)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad \left(\widehat{A_{i-2}A_{i-1}, A_{i-1}A_i} \right) = \theta_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad A_{i-1}A_i = l_i, \quad (2b)$$

e vincoli

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \theta_i \in [\theta_i^-, \theta_i^+]. \quad (2c)$$

(vedi figura 1).

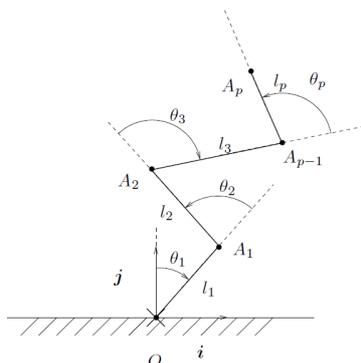


Figura 1. Il sistema del piano considerato.

Consideriamo la funzione Φ_p di

$$F = \prod_{i=1}^p [\theta_i^-, \theta_i^+], \quad (3)$$

a \mathbb{R}^2 , definito da

$$\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in F, \quad \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p) = A_p. \quad (4)$$

Molte opere si riferiscono naturalmente alla determinazione dei confini dell'area di lavoro. Per il passaggio 0, la funzione Jacobian Φ_p è necessariamente di rango inferiore a uno, se il punto si trova sul bordo. Sistematicamente, questo passaggio viene risolto simbolicamente annullando tutti i possibili determinanti estratti [5,6,7,8,9,10]. Per il passaggio 1, ci riferiamo ad esempio alle numerose opere di Abdel-Malek [7,11,8]. I calcoli presentati sono validi in una struttura più generale della nostra (2 o 3D, connessioni di tipo sferico o perno scorrevole). La condizione naturale utilizzata si basa su uno sviluppo limitato all'ordine 2 locale attorno a un punto in cui il giacobino è degenerato. Qui viene studiata la forma quadratica associata all'Assia. Quindi la condizione sufficiente per non essere all'interno dell'area di lavoro, è programmato nel calcolo simbolico (ad esempio con Mathematica $\text{\textcircled{R}}$) e vengono utilizzati i calcoli del rango e dello spettro delle matrici. Questi sono i segni degli autovalori che consentono di discriminare i diversi casi.

Questi calcoli sono, in teoria, abbastanza semplici, ma possono avere forti instabilità numeriche, oltre ad essere lunghi. Al contrario, cerchiamo in questa nota di usare la struttura particolare del nostro problema di piano. Usiamo in particolare il fatto che ci muoviamo localmente lungo un cerchio. Non viene effettuato alcun calcolo di derivato o spettro di matrici.

Altri numerosi studi riguardano la risoluzione di questo problema per manipolatori in serie o in parallelo [12-24]. Tuttavia, nessuno propone un metodo generale e questi lavori si riferiscono a casi particolari (piccoli numeri di gradi di libertà) o sono realizzati con approssimazioni numeriche o grazie a simulazioni casuali.

Per quanto ne sappiamo, solo un lavoro recente e molto interessante propone un metodo generale di risoluzione per determinare i limiti dello spazio di lavoro in un quadro molto generale (vedere [25] e [26, capitolo 4 (Determinazione dello spazio di lavoro)]). Ma è un metodo di risoluzione numerica, basato sul metodo proposto in [27].

2. Fase 0: condizione locale necessaria ma non sufficiente per appartenere al confine (promemoria).

Il confine $S = \partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$ è tradizionalmente suddiviso nella forma della seguente partizione $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} \in \mathbb{R}^2$. per S_I , tutti gli angoli θ_i sono gratuiti (ad es. in $]\theta_i^-, \theta_i^+[$). per S_{II} , ci sono almeno due componenti liberi tra i p angoli (gli altri sono θ_i^\pm). per S_{III} , esiste un solo componente gratuito. Abbiamo dimostrato in [2,3] che i giunti corrispondono alle configurazioni di S_I e di S_{II} i corrispondenti componenti liberi sono necessariamente allineati, il che ha permesso di scrivere e programmare l'algoritmo completo di determinazione dei punti verificando questa semplice condizione geometrica. S_{III} è chiaramente un incontro finito di archi. Abbiamo quindi dimostrato questo S è incluso in un'unione di archi di un cerchio definito da

$$\bigcup_{1 \leq m \leq M} \Phi_p \left(\prod_{k=1}^p \Theta_k^m \right), \quad (5)$$

dove \prod indica il prodotto cartesiano e ogni set Θ_k^m è determinato analiticamente. È un singleton o un intervallo (aperto o chiuso). Per ogni m , solo uno dei set Θ_k^m non è ridotto a un singleton.

Nota 1. È possibile che una o più parti S_I , S_{II} o S_{III} è vuoto, che non invalida l'algoritmo del passaggio 0, valido per tutti i valori di θ_i^\pm .

3. Passaggio 1: condizioni locali sufficienti ma non necessarie in modo che parti degli archi di un cerchio non si trovino sul bordo.

Una volta determinati i possibili cerchi ai quali un punto deve necessariamente appartenere al confine, osserviamo, come è fatto in modo classico in letteratura, il contributo locale delle infinite variazioni degli angoli che definiscono questo punto. Se è possibile che questo punto si evolva su entrambi i lati del cerchio, deduciamo che non si trova sul bordo.

Al contrario, se rimane localmente sullo stesso lato del cerchio, manterremo il punto o tutti questi punti (vale a dire una parte dell'arco del cerchio studiato), mantenendo informazioni sul lato in cui si trova. Questa discriminazione viene di solito fatta studiando il simbolismo e determinando lo spettro e il grado di una matrice. Al contrario, in questa Nota, nel caso piano si possono determinare i lati in cui il punto studiato localmente si evolve con semplici calcoli di prodotti scalari.

Studiamo ora uno dei cerchi definiti da (5), corrispondente a un intero m fisso e annotato \mathcal{C}_m . per $i \in \{1, \dots, p\}$, Θ_i^m è un intervallo non ridotto a un singleton. Gli altri intervalli sono un singleton. L'angolo θ_i pertanto varia nel frattempo Θ_i^m . Lo studio della variazione infinitesimale di θ_i non porta nulla qui, poiché sappiamo che il punto A_p si sposterà lungo l'arco \mathcal{C}_m . Tuttavia, possiamo supporre che ciascuno degli angoli θ_j , per $j \neq i$, può variare all'infinito attorno al suo valore. per $j \neq i$, considera ε_j definito da

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \theta_j = \theta_j^-, \\ -1, & \theta_j = \theta_j^+, \\ 0, & \theta_j \in]\theta_j^-, \theta_j^+[. \end{cases} \quad (6)$$

Definiamo $h = {}^t(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ con

$$h_i = 0. \quad (7)$$

prendere in considerazione $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. I punti A_k , per $1 \leq k \leq p$ dipendono da Θ , ora risolto e $A_p(\Theta + h)$ mezzi $\Phi_p(\Theta + h)$. Considera l'applicazione $\rho : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_{i-1}, 0, h_{i+1}, \dots, h_p) \mapsto \rho(\bar{h})$ definito da

$$\rho(\bar{h}) = A_{i-1} A_p^2(\Theta + \bar{h}) - A_{i-1} A_p^2. \quad (8)$$

Aggiungendo componenti null, corrispondenti al componente i , possiamo considerare il gradiente $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ e l'assia (simmetrica) $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ della funzione ρ , calcolato in 0 e scrivere lo sviluppo limitato di ρ per ordinare 2 nelle vicinanze di $h = 0$ nella forma

$$\rho(h) = Bh + {}^t h C h + o(\|h\|^2), \quad (9)$$

dove h controlla (7). Di solito (ad esempio in [7]), questi elementi sono calcolati in forma simbolica (formalmente), di seguito riportati, in modo esplicito.

Lemma 3.1 (espressione di B e termini diagonali di C) Notiamo σ rotazione dell'angolo del vettore $\pi/2$ di \mathbb{R}^2 . Posiamo $r_j = A_{j-1} A_p$, per $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Abbiamo per $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$:

$$B_j = 2\overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right), \quad (10a)$$

$$C_{jj} = r_j^2 - \overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \overrightarrow{A_{j-1}A_p}. \quad (10b)$$

Lemma 3.2 Abbiamo quindi, per $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$:

- Se $j \leq i-1$, c è $\alpha \neq 0$ e β dipende solo da $(\theta_k)_{k \in \{j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, p\}}$ con

$$\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_pA_{i-1}} = \alpha \sin(\theta_i + \beta), \quad \forall \theta_i. \quad (11)$$

- Se $j \geq i+1$, c è α dipende solo da $(\theta_k)_{k \in \{i+1, \dots, p\}}$ con

$$\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_pA_{i-1}} = \alpha, \quad \forall \theta_i. \quad (12)$$

Nota 2. Il numero $\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_pA_{i-1}}$ è dello stesso segno del componente dello spostamento del punto $A_p(\Theta + h)$ in direzione di $\overrightarrow{A_pA_{i-1}}$ quando l'angolo h_j subisce una variazione infinitesimale positiva e che tutti gli altri componenti di h sono zero.

Elimineremo le parti degli archi del cerchio corrispondenti ai punti che soddisfano la seguente condizione sufficiente per non trovarsi sul bordo:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists h, h' \in \mathbb{R}^p, \quad \left((7), \Theta + h, \quad \Theta + h' \in F, \quad 0 < \|h\| \leq a, \quad 0 < \|h'\| \leq a, \quad \rho(h)\rho(h') < 0 \right). \quad (13)$$

Anzi, in questo caso $A_p(\Theta + h)$ si evolve su entrambi i lati dell'arco C_m .

- All'inizio, a differenza della letteratura, ci accontentiamo di studiare solo il caso in cui un singolo componente di h è diverso da zero, gli altri sono zero (criterio diagonale locale). Quindi sistemiamo $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Se lo notiamo $\rho_j(\kappa) = \rho(0, \dots, 0, \kappa, 0, \dots, 0)$ con $\kappa \in \mathbb{R}$, quindi (9) è scritto

$$\rho_j(\kappa) = B_j\kappa + C_{jj}\kappa^2 + o(\kappa^2), \quad (14)$$

Si noti che $B_j = 0$ è equivalente a A_{i-1} , A_{j-1} e A_p allineati. Secondo [2,3], $\varepsilon_j = 0$ implica quindi che $B_j = 0$. Facciamo il ragionevole presupposto in biomeccanica o robotica che i punti A_k non può essere confuso, il che implica che se $B_j = 0$, allora $C_{jj} \neq 0$. Pertanto, tenendo conto (6):

$$\text{Se } B_j \neq 0, \text{ allora } \varepsilon_j \neq 0 \text{ e localmente, } \rho_j(\kappa) \text{ è dello stesso segno di } B_j\varepsilon_j \quad (15a)$$

$$\text{Se } B_j = 0, \text{ allora } C_{jj} \neq 0 \text{ e localmente, } \rho_j(\kappa) \text{ è dello stesso segno di } C_{jj}. \quad (15b)$$

Si noti che, per questo passaggio, la conoscenza dell'allineamento di alcuni punti, evidenziata geometricamente durante il passaggio 0 (in [2,3]), è quindi fondamentale.

Osservazione 3. Secondo l'osservazione 2, nel caso (15a), si è interessati in effetti al normale spostamento infinitesimale di un punto che descrive uno degli archi del cerchio, come pure l'osservazione di Abdel-Malek per esempio in [7]. In questo lavoro è presente anche uno sviluppo limitato (8), attraverso il calcolo della normale accelerazione. In questo caso (15b), d'altra parte, l'esame del componente normale del movimento da solo non è più sufficiente.

Il numero B_j dipende o no da i , secondo Lemma 3.1 e 3.2. Variando j in $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$ possiamo quindi eliminare tutte le parti degli archi del cerchio per le quali $\rho_j(\kappa)$ cambia segno e quindi mantiene solo le parti degli archi di un cerchio per cui il segno di $\rho_j(\kappa)$ è costante localmente, ad es.

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}, \quad \begin{cases} B_j = 0 & \implies \varepsilon_0 C_{jj} > 0, \\ B_j \neq 0 & \implies \varepsilon_0 \varepsilon_j B_j > 0. \end{cases}$$

- Abbiamo quindi, usando solo i termini diagonali di C , ha eliminato tutte le parti degli archi di un cerchio soddisfacendo una condizione sufficiente che risulta in (13). Una discussione sulla metodologia da adottare d'ora in poi e un confronto con i metodi usuali è presentata nell'Appendice A per non gravare su questo testo.

Infine, per ciascuno degli archi di (5), o eliminiamo quindi tutto l'arco studiato, se nessuno dei suoi punti si trova sul bordo, oppure manteniamo solo una parte (corrispondente a un incontro finito di archi di un cerchio). Se facciamo la scelta (A.2), non è certo che la parte conservata corrisponda a punti che si trovano localmente sullo stesso lato del cerchio. Al contrario, se facciamo la scelta, (A.7), che richiede più tempo per stabilire, è certo che questa parte corrisponde a punti che si trovano localmente sullo stesso lato del cerchio e quindi conosciamo il lato dell'arco di cerchio (interno o esterno) in cui il punto si evolverà localmente A_p . Anche in questo caso possiamo quindi mantenere la parte degli archi di un cerchio che contiene solo punti che sicuramente non si trovano al suo interno nella forma (5).

Per tutti gli esempi qui presentati, è stata fatta la scelta (A.2). Tuttavia, come controllo, è interessante impostare la scelta (A.7) per verificare a posteriori che tutti gli archi dei cerchi mantenuti siano garantiti. È stato quindi notato che tutti gli archi dei cerchi sono garantiti.

Vedi figura 6c dove sono stati rappresentati gli archi del cerchio mantenuti dal passaggio 1, con una piccola barra per ogni arco del cerchio che indica il lato in cui si evolve A_p .

4. Fase 2: condizioni generali necessarie e sufficienti per essere al confine.

Resta ora da eliminare le parti di un arco definite da (5) che non si trovano sul bordo, questa volta usando un criterio globale. Anzi, a livello locale, il punto A_p può rimanere sullo stesso lato dell'arco, ma l'altro lato del bordo può essere raggiunto per altri valori angolari lontani da quelli che definiscono l'arco. Abdel-Malek in [7,8] dice sobriamente che il bordo dell'area di lavoro è l'involuppo delle curve precedentemente definite.

Partiamo da un punto che sicuramente appartiene al limite dell'area di lavoro: il punto più lontano dall'origine dell'insieme degli archi del cerchio definito da (5). È certo che questo punto appartiene a un arco di cerchio del centro dell'origine. Quindi, arco del cerchio per arco del cerchio, giriamo, sempre nella stessa direzione, determinando, per ogni intersezione degli archi del cerchio, quella la cui direzione della tangente è il più vicino possibile all'arco del cerchio che abbiamo appena determinato. Quindi, manteniamo la parte di questo arco tra il punto considerato e l'intersezione con l'arco più vicino, tra quelli che rimangono. L'algoritmo termina quando si ritorna al punto iniziale. Questo passaggio è semplice in teoria: è davvero ogni volta che passiamo da un arco di un cerchio dal bordo al successivo, per essere in grado di affrontare tutti i casi che possono sorgere: diversi cerchi possono attraversare lo stesso punto, possono essere tangenti o concentrici. Inoltre, i calcoli vengono eseguiti numericamente, è necessario tenere conto della precisione della macchina per prevedere numericamente se i cerchi si intersecano, tangenti o concentrici (vedere la sezione 6).

La parte D essendo connessa ma non semplicemente connessa, è possibile che il suo complemento non sia collegato, vale a dire che compaiono dei buchi. La parte del confine che abbiamo appena definito nel modulo (5) è il confine esterno, cioè il confine comune di D e della componente illimitata del suo complemento. Per determinare gli altri componenti collegati del bordo (i bordi interni), il nostro algoritmo fornisce con certezza solo il bordo del foro contenente l'origine, se esiste (vedi figura 6d). In questo caso, il punto più vicino all'origine viene quindi determinato tra gli archi del cerchio definiti da (5). Se esiste il buco che contiene l'origine, si è di nuovo sicuri che questo punto appartiene a un arco di cerchio del centro dell'origine. Quindi, come prima, determiniamo gli archi del cerchio, passo dopo passo, fermandoci quando torniamo al primo punto. Qui, conoscere i possibili lati dell'interno in relazione agli archi di un cerchio può essere utile per eliminare gli incontri finiti

Alla fine abbiamo quindi completamente determinato il bordo dell'area di lavoro nella forma (5).

5. Applicazioni

Due applicazioni possono essere proposte immediatamente usando il metodo proposto (ma non sono ancora state programmate).

Prima di tutto, poiché il confine è noto come (5), è possibile risolvere il problema opposto al confine: cioè un punto M del piano dato sul bordo, possiamo determinare i valori di tutti gli angoli $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ come $M = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$. Notiamo, a questo proposito, che il nostro metodo consente di proporre, per ogni arco di un cerchio del bordo, una configurazione data in (5) che consente di descrivere l'arco del cerchio in questione. Esistono casi in cui diverse configurazioni fornite consentono di descrivere la stessa porzione di arco del cerchio, rendendo così il problema opposto con diverse possibili soluzioni. Si consideri ad esempio il sistema con un numero di gradi di libertà pari a $p = 2$ e i cui valori sono dati da

$$\begin{aligned} l &= (0.30, 0.15) \text{ (m)}, \\ \theta^- &= (-120, -30) \text{ (}^\circ\text{)}, \\ \theta^+ &= (0, 30) \text{ (}^\circ\text{)}. \end{aligned}$$

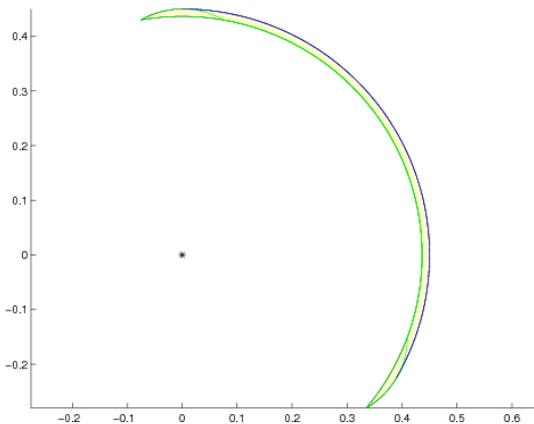


Figura 5. Simulazioni per $p = 2$. S_I è disegnato in blu e S_{III} è disegnato in verde. L'interno calcolato dell'area di lavoro è disegnato in giallo. Per il passaggio 1, otteniamo 7 archi di un cerchio.

Vedere la figura 5. Esistono due possibili configurazioni per descrivere una parte del cerchio con il centro dell'origine e che corrisponde alla parte del bordo più vicina all'origine.

Un'altra applicazione è un semplice criterio per sapere se un determinato punto sul piano si trova o meno nell'area di lavoro. È chiaro che grazie ai dati di (5), possiamo sapere se un punto si trova sul bordo o meno. Supponiamo che non sia al confine. Se si trova al di fuori del cerchio di origine centrale e il raggio della massima distanza dall'origine al bordo, sarà sicuramente all'esterno. Infine, contando metodicamente ed esaurientemente il numero di punti di intersezione di un dato segmento di linea con un insieme di cerchi dato da (5) e considerando la parità del numero ottenuto, otteniamo un semplice mezzo per sapere se il punto è all'esterno o all'interno di un'area di lavoro.

6. Attuazione

Gli algoritmi utilizzati sono stati implementati analiticamente, ma senza utilizzare il calcolo simbolico, in Matlab®. Questo passaggio ha quindi utilizzato il calcolo numerico di Matlab. Durante i passaggi da 0 a 2, era essenzialmente necessario determinare gli angoli durante la transizione dalle coordinate cartesiane a coordinate polari. Vedi i dettagli dell'algoritmo del passaggio 0 in [3]. Inoltre, durante le fasi 1 e 2, era necessario testare la nullità o il segno diverso da zero di determinate quantità, cosa che è necessariamente fatta in modo approssimativo a causa dell'arrotondamento dei calcoli. Abbiamo quindi scelto un parametro $\varepsilon > 0$ e sostituito ad esempio le uguaglianze di tipo $X = 0$ da $|X| \leq \varepsilon$. Più precisamente, per il passaggio 1, abbiamo scelto $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-12}$ e per il passaggio 2, $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-13}$ che doveva essere preso 100 o 1000 volte più grande in alcuni casi, dove p è più grande.

Nella progettazione di robot, a volte è importante essere in grado di avere esplicite caratteristiche geometriche dei bordi delle aree di lavoro. Possiamo quindi utilizzare, in questo caso, il calcolo simbolico di Matlab. Quando passiamo da coordinate cartesiane a coordinate polari, i nostri codici usano le funzioni di Matlab `cart2pol` e `atan2`, che non supportano i tipi simbolici. Tuttavia, le funzioni `acos` e `asin` supportarli e sarebbe quindi possibile determinare simbolicamente le coordinate polari, nella misura in cui le lunghezze e gli angoli sono essi stessi convertiti in simbolici. In questo caso, si potrebbe naturalmente testare rigorosamente la nullità e i segni di quantità definite in modo simbolico.

7. Simulazioni numeriche

Come in [3], per la simulazione numerica, consideriamo un soggetto di altezza 1,80 m. Le lunghezze dell'arto superiore sono state determinate dai dati antropometrici di [4]. Le lunghezze dei segmenti sono indicate come rapporto dimensionale (rispettivamente 0,108, 0,146 e 0,186 per la mano, l'avambraccio e il braccio per l'arto superiore destro). Gli angoli corrispondono al massimo e al minimo delle articolazioni, corrispondenti al rapimento / adduzione orizzontale della spalla ($-60^\circ / 120^\circ$); flessione / estensione del gomito ($0^\circ / 130^\circ$) e abduzione / adduzione del polso ($-10^\circ / 25^\circ$). Vedi figura 1, dove $p = 3$ e O è la spalla, A_1 il gomito, A_2 il polso, il segmento OA_1 è il braccio, A_1A_2 , avambraccio e A_2A_3 mano. Vedi tabella 1 e figure 2, 3 e 4.

Tabella 1. Parametri utilizzati

caso	p	Lunghezza / dimensione del segmento	$(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ ($^\circ$)	$(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ ($^\circ$)	figure
io	1	0,440	-60	120	2
ii	2	0,186; 0,254	-60; 0	120; 130	3
iii	3	0,186; 0,146; 0,108	-60; 0; -10	120; 130; 25	4

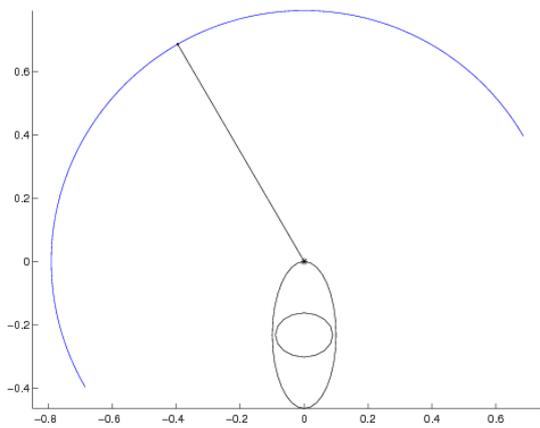


Figura 2. Simulazioni per $p = 1$. C'è solo un arco circolare (S_{III}) (in blu).

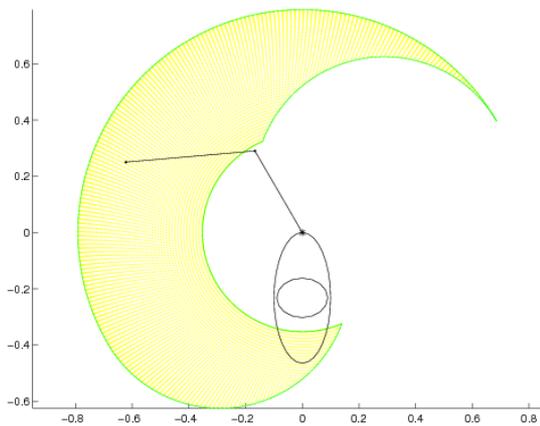
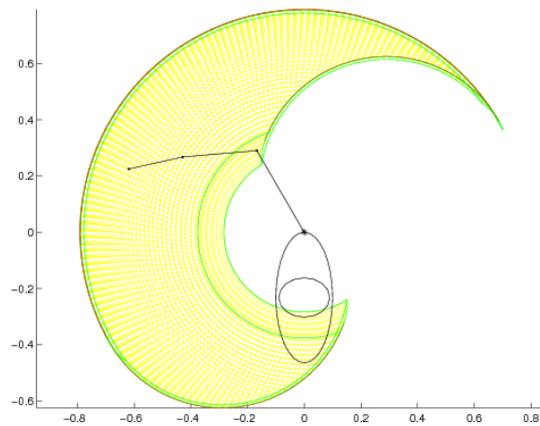
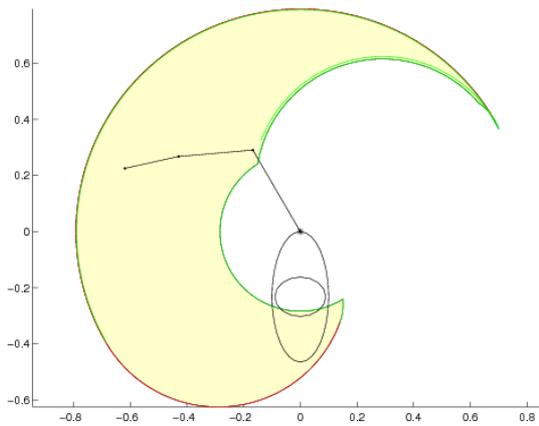


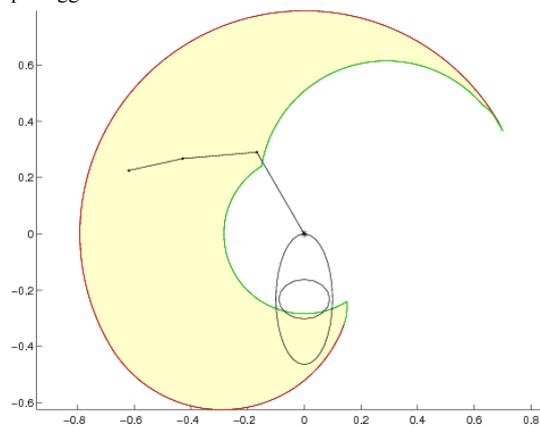
Figura 3. Simulazioni per $p = 2$. S_{III} è disegnato in verde. La superficie discreta acquisita viene tracciata in giallo. Qui, i tre passaggi danno gli stessi risultati. Il numero di archi ottenuti è 4.



passaggio 0



passaggio 1



passaggio 2

Figura 4. Simulazioni per $p = 3$. S_{II} è disegnato in rosso e S_{III} è disegnato in verde. L'area discreta spazzata e l'interno calcolato dell'area di lavoro sono disegnati in giallo. I numeri di archi corrispondenti alle fasi 0,1 e 2 sono rispettivamente 16, 11 e 8.

- i. il caso i corrisponde al braccio libero, all'avambraccio e alla mano bloccati;
- ii. Il caso ii corrisponde al braccio e all'avambraccio liberi, bloccati a mano;
- iii. Il caso iii corrisponde al braccio, all'avambraccio e alla mano libera.

Tabella 2. Definizione geometrica degli

archi di un cerchio nella forma (5).

tipo	$\Theta_1(^{\circ})$	$\Theta_2(^{\circ})$	$\Theta_3(^{\circ})$
II	$[-60, 120]$	$\{0\}$	$\{0\}$
II	$\{120\}$	$[0, 130]$	$\{0\}$
III	$\{120\}$	$\{130\}$	$[0, 25]$
III	$[-60, 120]$	$\{130\}$	$\{25\}$
III	$\{-60\}$	$[0, 130]$	$\{25\}$
III	$\{-60\}$	$\{0\}$	$[10, 25]$
III	$[-60, -55.1005]$	$\{0\}$	$\{-10\}$
III	$\{-60\}$	$\{0\}$	$[-10, 0]$

Diamo nella tabella 2 la descrizione di $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ sotto forma di unione di archi (5) e intervalli Θ_i per $i \in \{1, 2, 3\}$ corrispondente, per l'intero caso iii. Ogni set Θ_i per $i \in \{1, 2, 3\}$ è un singleton o un set chiuso. Tutti gli angoli in questa nota sono indicati in gradi.

Consideriamo ora un sistema (virtuale) con un numero di gradi di libertà pari a $p = 6$ e i cui valori sono dati da

$$l = (0.20, 0.20, 0.15, 0.35, 0.20, 0.20),$$

$$\theta^- = (-120, -120, -30, -90, -45, -23),$$

$$\theta^+ = (60, 170, 30, 91, 23, 24).$$

Vedi figura 6.

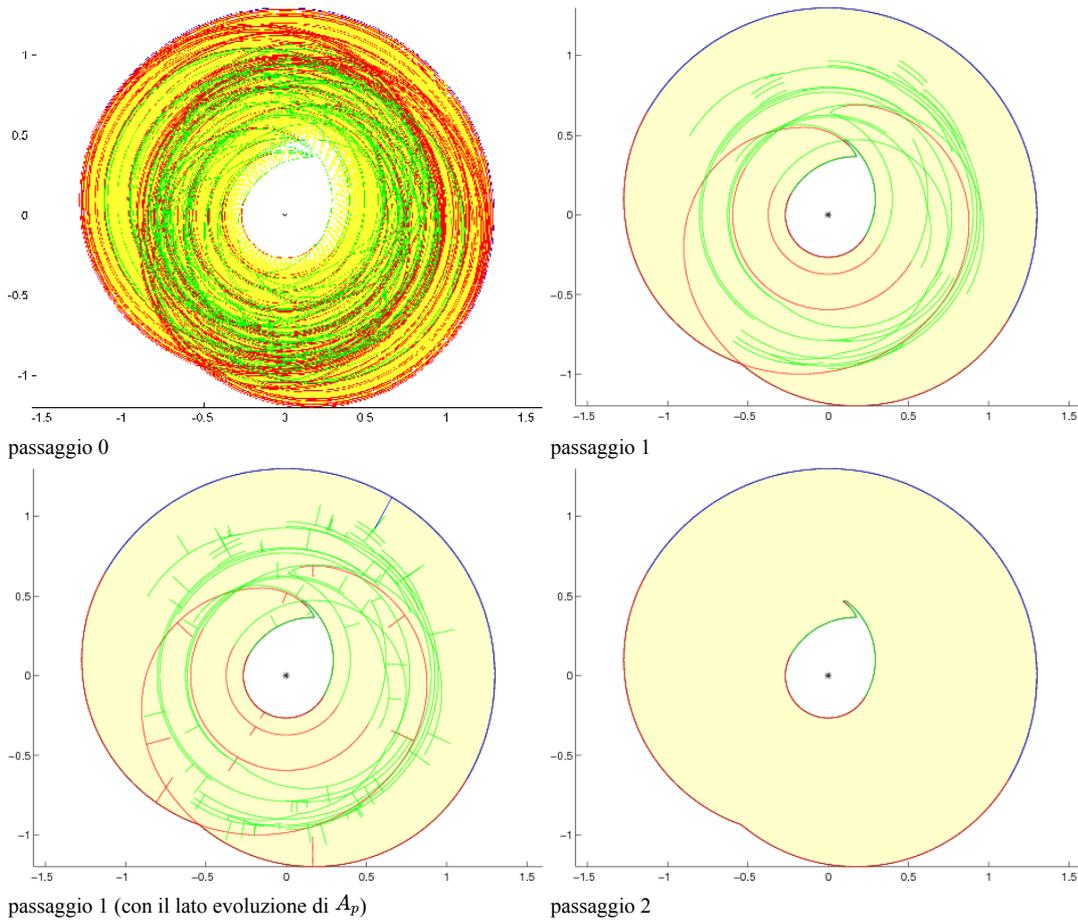


Figura 6. Simulazioni per $p = 6$. S_I è disegnato in blu, S_{II} è disegnato in rosso e S_{III} è disegnato in verde. L'area discreta spazzata e l'interno calcolato dell'area di lavoro sono disegnati in giallo. Il numero di archi corrispondenti alle fasi 0, 1 e 2 sono rispettivamente 506, 75 e 9.

Stampe casuali sono state fatte agli angoli θ^{\pm} e le lunghezze l . Il numero p di segmenti è stato variato da 2 a 12 eseguendo 200 calcoli per ciascun valore di p . I calcoli sono stati effettuati su un computer dotato di Windows 7 Professional e di un processore i5-6300HQ Intel (R) Core (TM) a 2,30 GHz (64 bit)

Avevamo dimostrato in [3] che l'algoritmo del passo 0, il più lungo, era presente $\mathcal{O}(a^p)$ dove a è reale. Una regressione lineare sul logaritmo dei calcoli di tempo confermano questo: dà una correlazione uguale a 0,9765 e un valore di un uguale a 3,5289. Se regressione sequenziale sul numero di archi di fase 0, questo conferma anche questi calcoli: dà una correlazione uguale a 0,9950 e un valore di un pari a 2,7771. Per la fase 1, una correlazione è trovata pari a 0,9356 e un valore di un uguale a 1,5190. Per il passaggio 2, il numero medio di archi sembra stabilizzarsi con p : for $p \geq 5$, troviamo un numero vicino a 11. Notiamo anche che fino a $p = 4$, i tempi di calcolo sono inferiori a 0.1 se quello $p = 6$, il 95% dei tempi di calcolo è inferiore a 1,0 s.

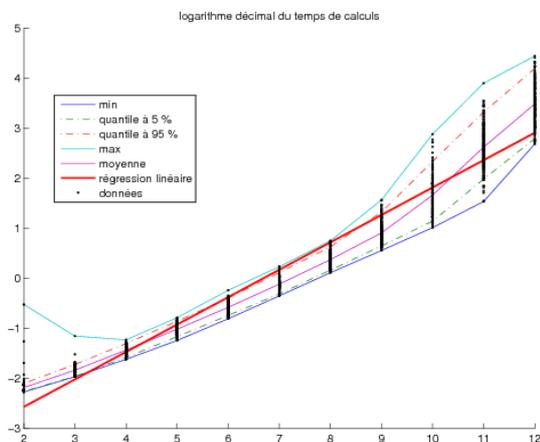


Figura 7. Logaritmo del tempo di calcolo

Vedi figura 7

8. Limitazioni

In pratica, secondo quanto fatto in letteratura, p non supera 6, (corrispondente a tempi di calcolo inferiori a 1.0s). Sembra che fino a $p = 11$, i calcoli hanno una durata molto più lunga (in media inferiore a 7.0 min.) Inoltre, il tempo di esecuzione è enorme (in media maggiore di 50.9min.). Programmato in Matlab, che è un linguaggio interpretato, alcuni loop (che non possono essere parallelizzati) possono essere lenti. Una programmazione ottimizzata in un linguaggio compilato guadagnerebbe quindi velocità.

Nella sezione 4, abbiamo discusso delle difficoltà nel rilevare i confini interni che non contengono l'origine. Le tecniche di scansione sistematica dei grafici consentirebbero di rilevare curve chiuse che potrebbero costituire confini interni, cercando tutte le possibili serie di archi di cerchi tra quelli rilevati durante il passaggio 1.

Infine, l'unico vincolo matematico rispettato è il vincolo (1). Potrebbero apparire altri vincoli per valori di p maggiori di quello dato nell'esempio: potrebbe essere quello del segmento $A_i A_{i+1}$ si interseca o è troppo vicino ad un altro segmento, il che non è possibile meccanicamente. Potremmo verificare che questo caso non si verifichi mai per piccoli valori di p . Prendere in considerazione questo vincolo sembra essere un problema molto più difficile!

9. Conclusione

Abbiamo determinato il bordo di un'area di lavoro piana in modo analitico ed esplicito, solo mediante calcoli espliciti, di angoli, di scalari, di intersezioni di archi di cerchio, senza alcun calcolo simbolico, né di risoluzione numerico di problemi non lineari. Più intuitivo poiché, basato esclusivamente su semplici calcoli di prodotti scalari, questo metodo ci sembra più efficiente; non usa il calcolo simbolico per il calcolo del giacobino né la determinazione numerica dello spettro della matrice, che è molto consumatore nelle risorse di calcolo e nel tempo di calcolo.

Un'estensione naturale di questo lavoro è l'estensione nella dimensione 3. Più tecnica, dovrebbe essere in grado di estendersi naturalmente, riprendendo ad esempio gli angoli di Eulero, le matrici rotazionali e le matrici (4, 4) omogeneo, chiamato Denavit-Hartenberg [28,29] o con le raccomandazioni di [30]. Gli archi di un cerchio verrebbero quindi sostituiti da porzioni di superfici nello spazio, come ad esempio sfere o tori. La semplice idea geometrica dell'allineamento del passaggio 0 dovrebbe rimanere così come il criterio del passaggio 1. Il passaggio 2 sarebbe più sottile, la scansione delle superfici dovrebbe essere effettuata in due dimensioni.

Allegato A. Complementi del metodo utilizzato

Abbiamo quindi, usando solo i termini diagonali di C , ha eliminato tutte le parti degli archi di un cerchio soddisfacendo una condizione sufficiente che risulta in (13). Tuttavia, quelli che rimangono non verificano necessariamente la negazione di (13), che è scritto:

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall h \in \mathbb{R}^p, \text{vEdrifiant (7)} \left(\Theta + h \in F \text{ et } 0 \leq \|h\| \leq a_0 \right) \implies \varepsilon_0 \rho(h) \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

In questo caso $A_p(\Theta + h)$ si evolve sullo stesso lato dell'arco \mathcal{C}_m .

- Contrariamente alla letteratura, e quindi, più semplicemente, una prima scelta consiste nell'essere soddisfatti di questi calcoli: si suppone quindi che

$$\text{criterio locale diagonale : definito da (16) dove il segno è costante, uguale a } \varepsilon_0. \quad (\text{A.2})$$

In questo caso, (A.1) è vero solo se h ha solo un componente diverso da zero. Le parti degli archi di un cerchio che sono state conservate quindi non hanno un segno $\rho(h)$ garantito localmente. Vedremo per il passaggio 2 (sezione 4) che partiamo da un arco garantito, vale a dire di cui siamo certi che (A.1) sia verificato. A poco a poco, ogni segno locale di $\rho(h)$ sarà quindi necessariamente garantito. Pertanto, alla fine dell'algoritmo, per tutte le parti degli archi di un cerchio conservate, (A.1) sarà vero. Per questa scelta, non era quindi necessario alcun calcolo di rango, spettro e calcolo nel simbolismo.

- Una seconda scelta ora consiste nel voler garantire il segno locale di $\rho(h)$ lungo gli archi conservati, come è convenzionalmente fatto. A rigor di termini, questo non porta molto, tranne per eliminare a posteriori alcuni archi di cerchio conservati che non verificherebbero (A.1). Vedremo di seguito, numericamente, che questi archi sono molto pochi. Studiamo quindi la forma quadratica definita da (9), ma che determineremo in modo esplicito e senza calcolo simbolico come di solito viene fatto. Inoltre, è necessario solo definire la parte relativa agli angoli corrispondenti alla B_j null, contenente i casi in cui i punti sono allineati. Anzi, anche se ciò significa riordinare gli elementi di $(\varepsilon_j)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}}$, B e di C , possiamo presumere senza perdita di generalità, che ci sia

$$q \in \{0, \dots, p-1\} \text{ con}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}, \quad B_k = 0, \quad (\text{A.3a})$$

$$\forall k \in \{q+1, \dots, p-1\}, \quad B_k \neq 0. \quad (\text{A.3b})$$

Quindi ci decomponiamo h , B e C in blocchi con questa partizione: $h = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{E} \\ t\mathcal{E} & \mathcal{F} \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\rho(h) = {}^t\mathcal{H}_1\mathcal{D}\mathcal{H}_1 + \varepsilon_0 \sum_{j=q+1}^{p-1} (\varepsilon_0 \varepsilon_j B_j + o(1)) |h_j| + o(\|h\|^2).$$

Tenendo conto di (16) e (A.4), è quindi necessaria una condizione necessaria e sufficiente affinché (A.1)

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vEdrifiant (6) et (7), } (0 \leq \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \implies \varepsilon_0 {}^t\mathcal{H}_1\mathcal{D}\mathcal{H}_1 \geq 0). \quad (\text{A.5})$$

Al contrario, una condizione sufficiente (ma non più necessaria) affinché (13) si verifichi è:

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}'_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vEdrifiant (6) et (7) } (0 < \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \text{ et } 0 < \|\mathcal{H}'_1\| \leq a_0) \implies ({}^t\mathcal{H}_1\mathcal{D}\mathcal{H}_1)({}^t\mathcal{H}'_1\mathcal{D}\mathcal{H}'_1) < 0. \quad (\text{A.6})$$

Siamo quindi portati a fare la seguente seconda scelta, come in letteratura:

Criterio locale totale : definito da (A.5) o (A.6).

(A.7)

È quindi necessario studiare il segno di una forma quadratica, studiando classicamente lo spettro della matrice associata. Tuttavia, ci limitiamo ai componenti corrispondenti ai punti allineati (contenenti i casi in cui gli angoli corrispondenti sono liberi). Possiamo determinare esplicitamente i coefficienti di \mathcal{D} , solo in base alle distanze tra i punti A_k , senza passare attraverso il calcolo simbolico, come mostrato nel seguente lemma:

Lemma A.1 (Espressione di termini non diagonali di \mathcal{D} (corrispondente ai termini B_j null)) Per j, j' in $\{1, \dots, q\}$ con $j \leq j'$, i punti $A_{i-1}, A_{j-1}, A_{j-1}$ e A_p sono allineati e abbiamo

$$\mathcal{D}_{jj'} = \overline{A_{j-1}A_p A_{j-1}A_p} - \overline{A_{i-1}A_p A_{j-1}A_p}.$$

Vi sono semplici condizioni sufficienti, non espresse qui, relative a \mathcal{D} , senza passare per il suo spettro, che assicurano che (A.5) o (A.6) sia verificato. In questo caso, tutti gli archi dei cerchi hanno un segno garantito. Come ultima risorsa, se nessuno di essi è verificato, allora come nella letteratura, lo spettro di \mathcal{D} . Vedremo, numericamente, che questi casi sono molto rari

riferimenti

- J.F.M. Molenbroek. Reach envelopes of older adults.
In : The 42-nd Annual Meeting of the "Human Factors and Ergonomics Society", pages 166-170, Chicago, USA, 1998.
- Jérôme Bastien, Pierre Legreneur, and Karine Monteil.
Caractérisation géométrique de la frontière de travail d'un système polyarticulé dans le plan.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Mécanique), 335 (3): 181-186, 2007.
- Jérôme Bastien, Pierre Legreneur, and Karine Monteil.
A geometrical alternative to jacobian rank deficiency method for planar workspace characterisation. Mechanism and Machine Theory, 45: 335-348, 2010.
- D.A. Winter. Biomechanics and Motor Control of Human Movement. John Wiley & Sons, New Jersey, Canada, 4 edition, 2009.
- Karim Abdel-Malek, Frederick Adkins, Harn-You Yeh, and Edward Haug. On the determination of boundaries to manipulator workspaces.
Robotic and Computer Integrated Manufacturing, 13 (1): 63-72, 1997.
- Karim Abdel-Malek and Harn-You Yeh. Geometric representation of the swept volum using jacobain rank-deficiency conditions.
Computer Aided Design, 29(6):457-468, 1997.
- Karim Abdel-Malek, Harn-You Yeh, and Othman Saeb. Swept volumes: void and boundary identification.
Computer-Aided Design, 30(13):1009-1018, 1998.
- Karim Abdel-Malek, Jingzhou Yang, Richard Brand, and Emad Tanbour. Towards understanding the workspace of human limbs.
Ergonomics, 47(13):1386-1405, 2004.
- E.Dupuis, E.Papadopoulos, and V.Hayward.
The Singular Vector Algorithm for the Computation of Rank- Deficiency Loci of Rectangular Jacobians.
In : International Conference on Intelligent Robots and Systems, Maui, Hawaii, USA, 2001.
- Jingzhou Yang, Yunqing Zhang, Liping Chen, and Karim Abdel-Malek. Reach envelope of human extremities.
Tsinghua Sci. Technol., 9(6):653-666, 2004.
- Karim Abdel-Malek, Harn-Jou Yeh, and Saib Othman. Interior and exterior boundaries to the workspace of mechanical manipulators.
Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 16:365-376, 2000.
- Mazen Zein, Philippe Wenger, and Damien Chablat.
An exhaustive study of the workspace topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications.
Mech. Mach. Theory, 41(8):971-986, 2006.
- A.M. Hay and J.A. Snyman. The determination of nonconvex workspaces of generally constrained planar Stewart platforms.
Comput. Math. Appl., 40(8-9):1043-1060, 2000.
- Andrzej J. Cebula and Paul J. Zsombor-Murray. Formulation of the workspace equation for wrist-partitioned spatial manipulators.
Mechanism and Machine Theory, 41(7):778-789, 2006.
- Sen Dibakar and T.S. Mruthyunjaya.
A computational geometry approach for determination of boundary of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology.
Mechanism and Machine Theory, 34:149-169, 1999.
- Jean-Pierre Merlet, Clément M. Gosselin, and Nicolas Mouly. Workspaces of planar parallel manipulators.
Mech. Mach. Theory, 33(1-2):7-20, 1998.
- M. Husty, E. Ottaviano, and M. Ceccarelli. A geometrical characterization of workspace singularities in 3R manipulators.
In : Advances in robot kinematics: analysis and design, pages 411-418. Springer, New York, 2008.
- Nives Klopčar and Jadran Lenarčič. Kinematic model for determination of human arm reachable workspace. Meccanica, 40(2):203-219, 2005.
- Xin-Jun Liu, Jinsong Wang, and G. Pritschow. Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms.
Mechanism and Machine Theory, 41(2):145-169, 2006.
- Haidong Li, Clément M. Gosselin, and Marc J. Richard.
Determination of maximal singularity-free zones in the workspace of planar three-degree-of-freedom parallel mechanisms.
Mech. Mach. Theory, 41(10):1157-1167, 2006.
- Jing-Shan Zhao, Min Chen, Kai Zhou, Jing-Xin Dong, and Zhi-Jing Feng.
Workspace of parallel manipulators with symmetric identical kinematic chains. Mech. Mach. Theory, 41(6):632-645, 2006.
- P. Jauer, I. Kuhlemann, F. Ernst, and A. Schweikard. Gpu-based real-time 3d workspace generation of arbitrary serial manipulators.
In : The 2nd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR), 2016.
- Ilian A. Bonev and Clément M. Gosselin. Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms.
IEEE Transactions on Robotics, 22(5):1011-1017, 2006.

24. Marc Arsenault and Clément M. Gosselin. Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 2-DOF tensegrity mechanism. *Mech. Mach. Theory*, 41(9):1072-1089, 2006.
25. Oriol Bohigas, Montserrat Manubens, and Lluís Ros. A complete method for workspace boundary determination on general structure manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(5):993-1006, 2012.
26. Oriol Bohigas, Montserrat Manubens, and Lluís Ros. Singularities of robot mechanisms, volume 41 of *Mechanisms and Machine Science*. Springer, Cham, 2017. Numerical computation and avoidance path planning.
27. Josep M. Porta, Lluís Ros, and Federico Thomas. A linear relaxation technique for the position analysis of multiloop linkages. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(2):225-239, 2009.
28. J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mech.*, 22:215-221, 1955.
29. Giovanni Legnani, Federico Casolo, Paolo Righettini, and Bruno Zappa. A homogeneous matrix approach to 3d kinematics and dynamics - i. theory. *Mechanism and Machine Theory*, 31(5):573-587, 1996.
30. G. Wu, F.C.T van der Helm, M. Veeger, H.E.J. Makhssous, P. Van Roy, C. Anglin, J. Nagels, A.R. Karduna, K. McQuade, X. Wang, and al. Isb recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion-part ii: shoulder, elbow, w. *Journal of Biomechanics*, 38(5):981-992, 2005.